Bases négatives

1 Préambule

On travaille avec le concept de base, la plus commune est la base 10, on peut aussi remarquer les bases binaires et hexadécimales (resp. 2 et 16). On cherche à rendre obsolète le signe - en écrivant les nombres en base négative. Dans une base négative un les chiffres en position paire correspondent à des valeurs négatives. Par exemple dans la base -10, on peut écrire $10_{(-10)} = -10_{(10)}$ et $25_{(-10)} = -15_{(10)} = 2 \cdot (-10) + 5 \cdot (1)$.

On rappelle que le calcul de la valeur d'un nombre en base B écrit comme $X = x_n ... x_2 x_1 x_0$ avec (x_i) les chiffres de droite à gauche est :

$$X_{(B)} = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot B^i$$

On peut noter que la somme à droite n'est écrit en aucune base.

Pour attester de l'utilité d'une base il faut qu'elle vérifie deux critères ; tous les nombres naturels positifs et négatifs doivent avoir une représentation unique dans cette base. Toutes les bases de valeur $b \geq 2$ possèdent ces propriétés, pour $b = 1$ l'écriture de 0 pose problème de même pour $b = -1$, enfin pour $b = 0$ il n'existe pas de valeur pouvant être écrite dans la base.

On cherche à montrer que pour tout $b < -1$ ces deux propriétés sont vérifiées.

2 Toute valeur possède une représentation

Commençons par poser $B \in]\!] -\infty, -2]\!]$ la base. Nous avons alors $E(x)$ le prédicat "x peut s'exprimer en base b avec un nombre finit de chiffres".

$$E(x) : \exists a \in [\![0, B[\![^{\mathbb{N}}, (x = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cdot B^k) \land (\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N, a_k = 0)$$

Déjà $E(0)$ est vrai, il suffit de prendre a tel que $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0$. On applique alors un raisonnement par récurrence, on suppose $E(x)$ pour un x quelconque, on cherche à démontrer $E(x + 1)$.

Puisqu'on a $E(x)$ on peut poser $a \in [\![0, B[\![^{\mathbb{N}}$ tel que a soit la représentation de x dans la base B.
On définit $S(a,k)$ et $R(a,k)$ par

$$\begin{aligned}&S(a,k) : \forall i \leq k (a_i = 0 \wedge i\, impair) \vee (a_i = -B-1 \wedge i\, pair)\\&R(a,k) : S(a,k-1) \wedge \neg S(a,k)\end{aligned}$$

On pose $b \in [\![0, b[\![^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, b_k = \begin{cases} 0 & si \quad S(a,k) \wedge k\, pair \\ -B-1 & si \quad S(a,k) \wedge k\, impair \\ a_k + 1 & si \quad R(a,k) \wedge k\, pair \\ a_k - 1 & si \quad R(a,k) \wedge k\, impair \\ a_k & sinon \end{cases}$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \begin{cases} B+1 & si \quad S(a,k) \wedge k\, pair \\ -B-1 & si \quad S(a,k) \wedge k\, impair \\ 1 & si \quad R(a,k) \wedge k\, pair \\ -1 & si \quad R(a,k) \wedge k\, impair \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On cherche ensuite à évaluer $\Delta = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \cdot B^k - \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cdot B^k$;
Par définition il existe un unique $t \in \mathbb{N}$ tel que $R(a,t)$, t est alors le premier rang k tel que $\forall n \geq k, \neg S(a,n)$. Par disjonction de cas, si t est pair :

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_k - a_k) B^k \\ &= \sum_{k=0, k\, pair}^{t-1} (B+1) B^k + \sum_{k=1, k\, impair}^{t} (-B-1) B^k + B^t \\ &= \sum_{k=0}^{t/2-1} (B+1) B^{2k} - B \sum_{k=0}^{t/2-1} (B+1) B^{2k} + B^t \\ &= (1-B)(1+B) \sum_{k=0}^{t/2-1} B^{2k} + B^t \\ &= (1-B^2) \frac{1-(B^2)^{t/2}}{1-B^2} + B^t \\ &= 1\end{aligned}$$

Si t est impair :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k)B^k \\
&= \sum_{k=0, k\, pair}^{t} (B+1)B^k + \sum_{k=1,k\, impair}^{t-1} (-B-1)B^k - B^t \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{t-1}{2}} (B+1)B^{2k} - B \sum_{k=0}^{\frac{t-1}{2}-1} (B+1)B^{2k} - B^t \\
&= (1-B)(1+B)\sum_{k=0}^{\frac{t-1}{2}} B^{2k} - B^t - (B+1)B^t \\
&= (1-B^2)\frac{1-(B^2)^{\frac{t-1}{2}+1}}{1-B^2} + B^{t+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dans les deux cas nous obtenons bien $\Delta = 1$, ce qui signifie que b est la représentation de $x+1$ en base B, il reste à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n, b_k = 0$.
Puisque t existe, nous avons

$$\begin{aligned}
&\forall k > t, a_k = 0 \\
\Rightarrow &\forall k > t, \neg S(a,k) \wedge \neg R(a,k) \\
\Rightarrow &\forall k > t, b_k = a_k = 0
\end{aligned}$$

Alors $E(x+1)$ est vérifié en prenant b. Nous avons donc $E(0)$ et $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) \Rightarrow E(x+1)$; par récurrence $\forall x \in \mathbb{N}, E(x)$

Ceci nous permet de conclure que toutes les valeurs *positives* possèdent une représentation dans toute base $B \leq 2$.

On peut établir un résultat similaire pour $E(x) \Rightarrow E(x-1)$ en posant c tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \begin{cases} -B-1 & si \quad S'(a,k) \wedge k\, pair \\ 0 & si \quad S'(a,k) \wedge k\, impair \\ a_k - 1 & si \quad R'(a,k) \wedge k\, pair \\ a_k + 1 & si \quad R'(a,k) \wedge k\, impair \\ a_k & sinon \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned}
&S'(a,k) : \forall i \leq k\ (a_i = 0 \wedge i\, pair) \vee (a_i = -B-1 \wedge i\, impair) \\
&R'(a,k) : S(a,k) \wedge \neg S(a,k-1)
\end{aligned}$$

De cette manière on obtient que toute valeur possède une représentation dans toute base $B \leq 2$.

3 Toute représentation est unique

Dans la suite on utilisera $var(a)$ la fonction qui associe à une représentation a sa valeur dans la base B.

Nous cherchons à montrer que chaque valeur ne possède qu'une seule représentation. Posons $a, b \in [\![0, B[\![^{\mathbb{N}}$ tel que a et b soient nuls à partir de deux rangs n et m, montrons que $var(a) = var(b) \Rightarrow a = b$.

On suppose $var(a) = var(b)$, soit :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot B^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i \cdot B^i$$

Alors, en posant $M = max(n, m)$, si $M = 0$ on a bien $a = b$, sinon si $a_M \neq b_M$ on a $|a_M - b_M| \geq B^M$ et

$$\begin{aligned} max(|val(a) - a_M - val(b) - b_M|) &= |\sum_{n<M} (-B-1) \cdot B^n| \\ &= |B|^M - 1 \\ &< |B|^M < |a_M - b_M| \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &|val(a) - val(b)| > |a_M - b_M| - |B|^M \\ \Rightarrow &|val(a) - val(b)| > 0 \\ \Rightarrow &val(a) \neq val(b) \end{aligned}$$

Ce qui contredit notre supposition originale, donc par l'absurde, $a_M = b_M$. On suit le même raisonnement avec a' et b' définis par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{M\}\ a'_n &= a_n \\ a'_M &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{M\}\ b'_n &= b_n \\ b'_M &= 0 \end{aligned}$$

On obtient récursivement $a_b = b_n$ pour tout $n \geq 0$. Finalement $a = b$.

On a donc bien démontrer que $val(a) = val(b) \Rightarrow a = b$, donc que toute représentation ne correspond qu'à une seule valeur. Enfin, de par la nature de val, il est facile de se convaincre que $a = b \Rightarrow val(a) = val(b)$, on a donc une bijection entre les valeurs entières et les représentations en base $b \leq -2$.

4 Opérations dans une base négative

On a montré que toute valeur entière possède une unique représentation en base négative, et ce sans utiliser le signe $-$. Néanmoins si toute les opérations usuelles doivent se faire en passant d'abord par une base classique cela ne donne pas beaucoup d'intérêt à ces bases. Heureusement il n'en est rien, les opérations élémentaires peuvent être facilement effectuées sans passage par une base intermédiaire.

4.1 Addition

L'addition de deux nombres peut se faire comme en base classique, chiffre à chiffre, à la différence près que les retenues sont négatives et non pas positive :

En base $B = -10$ par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{-1} & \text{-1} & & \\ & & 7 & 2 & 3 \\ + & 2 & 4 & 9 & 4 \\ \hline = & 1 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

On a bien $723_{(-10)} + 2494_{(-10)} = 683_{(10)} + (-1686_{(10)}) = -1003_{(-10)} = 1017_{(-10)}$.

Dans le cas ou une colonne possède une retenue et deux zeros on peut simplement ajouter une retenue positive à la colonne d'après et poser $B - 1$ comme resultat :

$$\begin{array}{cccc} & \text{+1} & \text{-1} & \\ & 1 & 0 & 4 \\ + & 2 & 0 & 8 \\ \hline = & 4 & 9 & 2 \end{array}$$

Toujours en base $B = -10$, on a bien $104_{(-10)} + 208_{(-10)} = 104_{(10)} + 208_{(10)} = 312_{(-10)} = 492_{(-10)}$

4.2 Opposé

L'opposé d'un nombre s'obtient en remplaçant chaque chiffre par son opposé et en additionnant 111...10 au résultat, par exemple, en base $B = -10$, l'opposé de $n = 123_{(-10)} (= 83_{(10)})$ se calcule :

1. On remplace chaque chiffre par son opposé : $n_i \to |B| - n_i$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 9 & 8 & 7 \end{array}$$

2. On ajoute 111...10, avec autant de 1 que de chiffre dans la valeur originale, ici 123 possède 3 chiffres, on ajoute 1110 :

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & & \\ & & 9 & 8 & 7 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline = & 0 & 0 & 9 & 7 \end{array}$$

On obtient $-(123_{(-10)}) = 97_{(-10)}$ et en effet, en comparant avec la base 10 on a bien $-(83_{(10)}) = 97_{(-10)}$.

Pendant l'étape 1, si le chiffre à inverser est 0, la valeur du nouveau chiffre devrait être B, qui n'est pas un chiffre en base B. On peut au choix ajouter un 1 dans la colonne suivante, quite à devoir appliquer plusieurs retenues ; ou laisser 0 dans le nouveau nombre et ne pas ajouter le 1 de la colonne suivante dans l'étape 2 :

$$-3072 = 7038 + 10110 = 17148$$

Demonstration Soit $(a_i)_{i \leq n}$ les chiffres d'nombre en base $B < 0$, alors :

$$\begin{aligned} -var(a) &= -\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-a_i) \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (|B| + B - a_i) \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (|B| - a_i) \cdot B^i + \sum_{i=0}^{n} B \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (|B| - a_i) \cdot B^i + \sum_{i=1}^{n+1} 1 \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (|B| - a_i) \cdot B^i + 111\ldots110 \end{aligned}$$

4.3 Soustraction

La soustraction découle directement de l'addition et la prise de l'opposé : $a - b = a + (-b)$.

4.4 Multiplication

La multiplication est très similaire à celle des bases classiques, il suffit de changer de table de multiplications :

Table de multiplication en base $B = -10$

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	190	192	194	196	198
3	3	6	9	192	195	198	181	184	187
4	4	8	192	196	180	184	188	172	176
5	5	190	195	180	185	170	175	160	165
6	6	192	198	184	170	176	162	168	154
7	7	194	181	188	175	162	169	156	143
8	8	196	184	172	160	168	156	144	132
9	9	198	187	176	165	154	143	132	121

Il suffit ensuite d'appliquer la multiplication classique :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 3 & 2 \\
\times & & & 2 & 7 \\
\hline
= & & 1 & 9 & 4 \\
+ & 1 & 8 & 1 & 0 \\
+ & & & 4 & 0 \\
+ & & 6 & 0 & 0 \\
\hline
= & 0^{-1} & 4^{-1} & 4 & 4
\end{array}
$$

On a bien $32_{(-10)} \times 27_{(-10)} = -28_{(10)} \times -13_{(10)} = 364_{(10)} = 444_{(-10)}$.

4.5 division

?

5 Changement de base

Pour écrire un nombre en base négative on l'écrit d'abord dans la base positive associée puis on utilise le fait que le nombre s'écrit comme somme d'un nombre positif et d'un nombre négatif.

Soit $B < 0$, un nombre $x \in \mathbb{N}$, p ses chiffres dans la base $B' = |B|$. Alors :

$$
\begin{aligned}
x =& \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i \cdot |B|^i \\
=& \sum_{i\in\mathbb{N}, i\ pair} p_i \cdot B^i + \sum_{i\in\mathbb{N}, i\ impair} p_i \cdot (-B)^i \\
=& \sum_{i\in\mathbb{N}, i\ pair} p_i \cdot B^i - \sum_{i\in\mathbb{N}, i\ impair} p_i \cdot B^i \\
=& var\left((p_0, 0, p_2, 0, p_4 ...)\right) - var\left((0, p_1, 0, p_3, 0...)\right)
\end{aligned}
$$

Or on sait déjà faire la soustraction de deux nombres écrits en base négative. On peut donc calculer les chiffres de n en base négative en soustrayant le nombre obtenu à partir des chiffres en position impaire de n à ceux en position paire.

Un exemple, pour $n = 94508, B = -10$. On a $p = (8, 0, 5, 4, 9, 0, 0...)$

			9	0	5	0	8	
-				4	0	9	0	
=			9	0	5	0	8	
+				6	0	1	0	On calcule 90598+(-4090)
+			1	0	1	0	0	
=	1	9^{-1}	0	6	6	1	8	

On obtient que $94598_{(10)} = 1906618_{(-10)}$.

Si $n < 0$, on calcule les chiffres de $|n|$ puis on passe par l'opposé.

6 Base -2

7 Conclusion

TODO
Il faut aussi noter qu'on ne traite pas des valeurs définies par une suite infinie de chiffres, tous les raisonnements sont similaires à ceux qu'on peut trouver en base classique.